Title	Navier-Stokes方程式の非有界な解は爆発し得る (流体と気体の数学解析)
Author(s)	岡本, 久; 中村, 健一; 柳下, 浩紀
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1322: 102-106
Issue Date	2003-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/43118
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1322 巻 2003 年 102-106

Navier-Stokes 方程式の非有界な解は爆発し得る

岡本　久*　中村健一†　柳下浩紀‡

要旨

エネルギー不等式を無視すると Navier-Stokes 方程式の解は奇妙な挙動を示す．ある場合には有限時間で爆発することもある．本稿では最近筆者らが見つけた解の爆発の例を報告する．これを病的なことがらであると片づけることもできるし，『こういうことがあるからエネルギー不等式が大切なんだ』というふうに話をもっていってもよい．しかし，最終的に出てくる方程式は発展方程式としては何ら病的なものではなく，それ自体の適切性を論ずるのはおもしろい課題であると思っている．

1　序

多くの研究者は，非圧縮粘性流体の方程式である Navier-Stokes 方程式の解はすべての時間にわたって連続であると考えているようである ([3],[6, 第 7 章], [13])．これには注意が必要で，正確には『エネルギー不等式を満たす解はすべての時間について連続である』というべきである．エネルギー不等式を満たさない解で，不連続なものをつくることが可能である，という事実をここに報告したい．

本稿で考える解は 3 次元空間全体で定義されており，しかも速度場は空間変数について非有界である．従って特にエネルギーは無限大となり，エネルギー不等式が意味を持たない．しかし，そのような場合でもいくつかの Ansatz を用いることによって空間一変数の発展方程式の形に書き直すことができ，いくつかのおもしろい問題を得ることができる．

そのような例として，[11] で考えたものを取り上げる．3 次元空間において

$$\mathbf{u} = (-\gamma_1(t)x + u(t,x,y), -\gamma_2(t)y + v(t,x,y), (\gamma_1(t)+\gamma_2(t))z) \tag{1}$$

という形をした速度ベクトル場を考える．t は時間であり，(x,y,z) は空間 $\mathbf{R}^3$ の座標である．ω を $\omega = v_x - u_y$ で定義し，Navier-Stokes 方程式に代入すると，

$$\omega_t + (-\gamma_1 x + u)\omega_x + (-\gamma_2 y + v)\omega_y - (\gamma_1+\gamma_2)\omega = \nu\Delta\omega, \tag{2}$$

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学数理解析研究所
† 〒 182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1　電気通信大学 情報工学科
‡ 〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641　東京理科大学 理工学部 数学科

を得る. (下つきの文字は微分を表すものとする.) u と v は $u_x+v_y=0$ を満たすから,

$$u(t,x,y)=\frac{-1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\omega(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$
$$v(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\omega(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

となることがわかる (これはいわゆる Biot-Savert の法則の特殊な場合に相当する). 従って, 方程式 (2) は ω について閉じたものとみることができる. ただし, まだ γ_1 と γ_2 が未定のままである.

以下, $\gamma_1\equiv\gamma_2$ の場合を考えることにしよう. すると, 解は軸対称になる: $\omega=\omega(t,r)$ ($r=\sqrt{x^2+y^2}$). 速度と ω の関係は, (r,θ) を極座標として

$$u=-f(t,r)\sin\theta,\quad v=f(t,r)\cos\theta,\quad \omega=\frac{1}{r}(rf)_r. \tag{3}$$

と書いてもよい. (3 番目の式で f を定義し, それを用いて u と v を第 1,2 式で定める.) $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)$ を $\gamma(t)$ で表せば,

$$\omega_t-\gamma(t)(r\omega_r+2\omega)=\nu\frac{1}{r}(r\omega_r)_r \qquad (0\le r<\infty). \tag{4}$$

を得る.

(2) あるいは (4) はもともと J.M. Burgers によるものであり, 流体力学ではよく知られているものである. しかし, これまでは $\gamma(t)$ が与えられた定数である場合か, あるいは, 与えられた関数である場合に調べられていた ([10] の文献参照). 一般に, $\gamma(t)$ が何であっても上の方程式の解が Navier-Stokes 方程式の厳密解を与えることに変わりはない. 物理的な設定に応じて $\gamma(t)$ を指定すればよいのである. 文献 [11] は物理的な考察に基づいて

$$\gamma(t)=\|\omega(t)\|_p \tag{5}$$

といった関数関係を仮定し, どのような現象が起きるのかを調べた. ここで, $\|\ \ \|_p$ は L^p ノルムである. [11] では, $1\le p<\infty$ のときに解が時間について大域的に存在することが証明された. しかし $p=\infty$ のときには, 有限時間で爆発する特殊な自己相似解を見いだしただけであって, 一般の初期値に対して何が起きているのかは不明であった.

筆者らは最近, この $p=\infty$ の場合についてほぼ満足のいく解答を与えることができたのでここでその報告をしたい.

2 結果

方程式

$$\omega_t-\|\omega(t)\|_\infty(r\omega_r+2\omega)=\nu\frac{1}{r}(r\omega_r)_r \qquad (0\le r<\infty) \tag{6}$$

を初期条件

$$\omega(0,r)=\omega_0(r) \tag{7}$$

のもとで解く.

初期関数には次の仮定をおく: ω_0 は $[0,\infty)$ で有界, 一様連続, かつ, 次の条件を満たす;

$$\|\omega_0\|_1 \equiv \int_0^\infty |\omega_0(r)| r\,\mathrm{d}r < \infty,$$
$$\|\omega_0\|_* \equiv \sup_{0\le r<\infty} r|\omega_0(r)| < \infty.$$

このとき次の定理が成り立つ:

定理 1 上のような初期値に対し, (6)(7) の解が一意に存在する. さらに, すべての $0 \le r < \infty$ について $\omega_0(r) \ge 0$ と仮定するとき, 解が $0 \le t < \infty$ 全体で存在するのは $\|\omega_0\|_1 \le \nu$ となるときであり, また, そのときに限る. $\nu < \|\omega_0\|_1$ のときには, $T<\infty$ を爆発時刻とするとき,

$$\lim_{t\to T}(T-t)\|\omega(t)\|_\infty = \frac{\|\omega_0\|_1}{2\left(\|\omega_0\|_1-\nu\right)} \tag{8}$$

が成り立つ.

ここで, 爆発するかどうかを決定するのは L^1 ノルムであるが, 爆発する量は L^∞ ノルムであることがおもしろいところである. 証明については文献 [10] を御覧になっていただきたい. そこでは (8) 以外の漸近的な振る舞いについても多少の知見が得られている.

(6)(7) の解の一意性は困難なく証明できる. これを, もともとの $\mathbf{u}$ が非有界関数のクラスで一意である, というふうに勘違いしてはならない. (3) の形の $\mathbf{u}$ を仮定すれば, この形の解のクラスでは一意性が保証される, ということである. こうした仮定なしで, 速度場の (空間における) 増大度を指定するだけではうまくいかない. 実際, 古典解の一意性すらなりたたないこともある (文献 [7, 12] 参照). こうした事実は様々な人々によって独立に認識されてきたようで, 例えば文献 [4] ではこうした一意性の困難を圧力 p に特別な形を仮定することで回避している. 我々の問題の場合には一般化された Biot-Savart の法則 (1) と (5) によって局所一意存在が保証される形になっている.

3 まとめ

上の結果は, 次のようにまとめることができる:

主張 1 渦度方程式に一般化された Biot-Savart の法則 (1) を組み合わせたものは, (適当に解のクラスを設定すれば) 時間について局所的に適切であり, 同時に有限時間で爆発することがある.

注意 1 我々は, (たとえエネルギー無限大であっても)Navier-Stokes 方程式の解で爆発するものを初めて見つけたと主張しているわけではない. 例えば [5] はそうした例を見つけている. しかし, これには爆発の証明が (我々が知る限り) ない. また [12] では爆発する例があげられているが, これには初期ベクトル場を与えても解が一意に定まらない. 解の一意性と爆発の両方がきちんと証明できている例としては我々のものが最初ではなかろうかと考えている.

これに対し, Euler 方程式ではより多くの非有界な爆発解が知られている. たとえば [16] を参照していただきたい.

非有界な解についてはこの他にも面白い問題があり, [1, 2, 5, 9, 14, 16] などが参考になるかもしれない.

文献 [3, 6, 8] にあるように, Navier-Stokes 方程式あるいは Euler 方程式の大域解の存在問題は大変難しい. そこでこれまでとは違った関数のクラスを用いてそこでの適切性を論ずることはやってみる価値のある問題であろう. 例えば [8, 15] にはそうした方向が見える. しかし, [2, 5, 16] にあるような Ansatz を用いて適当な関数のクラスを設定すると別の世界も現れてくる.

参考文献

[1] X. Chen and H. Okamoto, Global existence of solutions to the Proudman–Johnson equation, *Proc. Japan Acad.*, **76**, Ser. A (2000), pp. 149–152.

[2] X. Chen and H. Okamoto, Global existence of solutions to the generalized Proudman–Johnson equation, *Proc. Japan Acad.*, **78**, Ser. A (2002), pp. 136–139.

[3] Millenium Prize Problems `http://www.claymath.org`

[4] Y. Giga, S. Matsui, and O. Sawada, Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity, *J. Math. Fluid Mech.*, vol. 3 (2001), 302–315.

[5] R. E. Grundy and R. McLaughlin, Global blow-up of separable solutions of the vorticity equation, *IMA J. Appl. Math.*, **59** (1997), 287–307.

[6] 一松　信 他, 数学七つの未解決問題, 森北出版 (2002).

[7] N. Kim and D. Chae, On the uniqueness of the unbounded classical solutions of the Navier-Stokes and the associated equations, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 186 (1994), 91–96.

[8] 小薗英雄, Navier-Stokes 方程式, 数学 第 54 巻 (2002), 178–202.

[9] M. Nagayama, H. Okamoto, and J. Zhu, On the blow-up of some similarity solutions of the Navier-Stokes equations, *Quaderni di Matematica*, in press.

[10] K.-I. Nakamura, H. Okamoto, and H. Yagisita, Blow-up solutions appearing in the vorticity dynamics with linear strain, to appear in *J. Math. Fluid Mech.*

[11] K. Ohkitani and H. Okamoto, Blow-up problems modeled from the strain-vorticity dynamics, 京都大学数理解析研究所講究録 第 1234 巻, (2001), 240–250. Also, in "Tosio Kato's Method and Principle for Evolution Equations in Methematical Physics, h. Fujita, S. T. Kuroda and H. Okamoto Eds., University of Tokyo Press Production Center, (2002), 239–249.

[12] H. Okamoto, A uniqueness theorem for the unbounded classical solution of the nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^3$, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 181 (1994), 473–482.

[13] 岡本　久, Navier-Stokes 方程式の解の構造について, ながれ, **19**, (2000), 172–179.

[14] 岡本　久, Proudman-Johnson 方程式の周辺の話題, 京都大学数理解析研究所講究録 第 1225 巻, (2001), 176–179.

[15] 山崎昌男, 種々の関数空間における Navier-Stokes 方程式, 数学 第 51 巻 (1999), 291–308.

[16] H. Okamoto and J. Zhu, Some similarity solutions of Some similarity solutions of the Navier-Stokes equations and related topics, *Taiwanese J. Math.*, **4** (2000), pp. 65–103.